Задаци са векторима

припремио *Владимир Балтић*

1. Нека је K средиште тежишне дужи CC_1 троугла $\triangle ABC$ и нека је $AK \cap BC = \{M\}$. Нађи однос $CM : MB$.

2. Нека су K и L тачке ивице AD, односно дијагонале AC паралелограма $ABCD$, такве да је $\overrightarrow{AK} : \overrightarrow{KD} = 1 : 3$ и $\overrightarrow{AL} : \overrightarrow{LC} = 1 : 4$. Доказати да су тачке K, L и B колинеарне.

3. Гусар је отео стару карту острва са благом. На њој су уцртани амбар, бунар, ветрењача и гребен (који су на карти означени са A, B, V, G), и они се налазе у теменима паралелограма. На праволинијском путу од амбара до бунара уцртан је јаблан (J) тако да је однос $AJ : JB = 4 : 1$. На праволинијском путу између ветрењаче и гребена уцртана је липа (L). На праволинијском путу од гребена до бунара налазе се закопано благо (X) и крчма (K). На карти се амбар, закопано благо и липа налазе на истом праволинијском путу. Такође на карти се јаблан, крчма и липа налазе на истом праволинијском путу. Ураган је однео амбар, ветрењачу, јаблан и липу, тако да су на острву остали само бунар, крчма и гребен. Гусар је прво установио да је растојање од бунара до крчме $25m$. Након тога је сео у крчму. Тамо је сазнао да је растојање између гребена и крчме $75m$. Колико гусар треба да пређе, када изађе из крчме, да би дошао до блага?

4. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао код кога је $AB \parallel DE$. Нека су M, P, N и Q редом средишта страница BC, CD, EF и FA, а K и L редом средишта дужи MN и PQ. Доказати да се тачке K и L поклапају ако и само ако је $AB = DE$.

5. На страницама BC, CA и AB троугла $\triangle ABC$ уочене су тачке A_1,B_1 и C_1, редом. Нека је T тежиште троугла $\triangle ABC$, а T_1 тежиште троугла $\triangle A_1B_1C_1$. Доказати да је $T \equiv T_1$ ако и само ако је

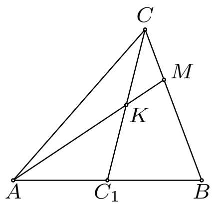
$$AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A.$$

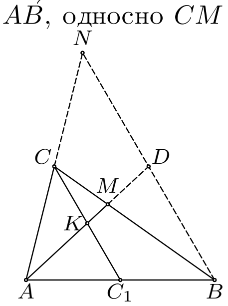
6. Нека је $ABCD$ трапез код кога је $AB \parallel CD$ и P тачка на продужетку дијагонале AC тако да је C између A и P. Ако су X и Y средишта основица AB и CD, а M и N пресечне тачке правих PX и PY са дужима BC и DA, редом, доказати да је права MN паралелна основицама трапеза.

7. Доказати да се у координатној равни не може нацртати конвексни четвороугао, коме је једна дијагонала два пута дужа од друге, угао између дијагонала му је $45°$, а координате свих темена су цели бројеви.

Решења

1. <u>*Решење 1*</u>: Тачка K је средиште дужи CC_1, те је $\overrightarrow{AK}=\dfrac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC_1}}{2}$. Вектори $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AM}$ су колинеарни, тј. $\overrightarrow{AK}=\lambda\overrightarrow{AM}$ и како је C_1 средиште дужи AB, тј. $\overrightarrow{AC_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, претходна једнакост добија облик $\lambda\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, односно $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2\lambda}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4\lambda}\overrightarrow{AB}$. Како су тачке C, M и B колинеарне то је $\frac{1}{2\lambda}+\frac{1}{4\lambda}=1$, тј. $\lambda=\frac{3}{4}$, па је $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, односно $CM:MB=1:2$.

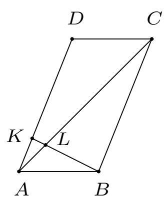


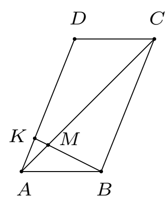


<u>*Решење 2*</u>: Нека је N тачка на правој AC, таква да је $BN\parallel CC_1$ и нека је $AM\cap BN=\{D\}$. Тада је $\dfrac{CK}{KC_1}=\dfrac{ND}{DB}$, па је $ND=BD$ и $\dfrac{AC_1}{C_1B}=\dfrac{AC}{CN}$, па је $AC=CN$. Дужи BC и AD су тежишне дужи троугла $\triangle ABN$, па је M тежиште тог троугла, одакле следи да је $CM:MB=1:2$.

2. <u>*Решење 1*</u>: Означимо са $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$. Тада је $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\vec{b}$ и $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b})$. Одатле је $\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AK}=\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}$ и $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{AL}-\overrightarrow{AK}=\frac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b})-\frac{1}{4}\vec{b}=\frac{1}{5}\vec{a}-\frac{1}{20}\vec{b}$. Како је $\overrightarrow{KB}=5\overrightarrow{KL}$ добијамо да су тачке K, L и B колинеарне.

<u>*Решење 2*</u>: Исто као у претходном начину добијемо $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b})$. Како је $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AK}$ и $\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=1$ добијамо да су тачке B, L и K колинеарне.

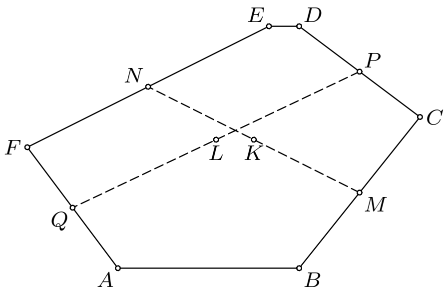




<u>*Решење 3*</u>: Дужи KB и AC се секу и нека је $KB\cap AC=\{M\}$. Тада имамо сличне троуглове $\triangle AKM\sim\triangle CBM$ ($\sphericalangle AMK=\sphericalangle CMB$ – унакрсни углови, $\sphericalangle AKM=\sphericalangle MBC$ и $\sphericalangle MAK=\sphericalangle MCB$ – углови са паралелним крацима) па је $\dfrac{AM}{MC}=\dfrac{AK}{CB}=\dfrac{\frac{1}{4}AD}{AD}=\dfrac{1}{4}$, па је $MC=4AM$, а како је $LC=4AL$ добијамо да је $M=L$, односно $L\in KB$, тј. тачке K, L и B су колинеарне.

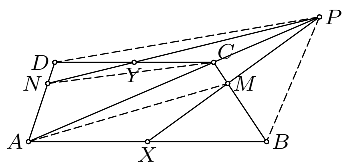
3.

4. Нека је O произвољна тачка. Тада је $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})=\frac{1}{2}\big(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})\big)=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})$ и слично $\overrightarrow{OL}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OA})$, па је $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OL}$ ако и само ако је $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}$, тј. $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OE}$, односно $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}$, што је и требало доказати.



5. Нека је $AC_1 : C_1B = k, BA_1 : A_1C = l$ и $CB_1 : B_1A = m$. Тада је $3\overrightarrow{TT_1}=\overrightarrow{TA_1}+\overrightarrow{TB_1}+\overrightarrow{TC_1}=(\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{AA_1})+(\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{BB_1})+(\overrightarrow{TC}+\overrightarrow{CC_1})=(\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC})+(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1})=\overrightarrow{0}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}+\frac{l}{l+1}\overrightarrow{BC}+\frac{m}{m+1}\overrightarrow{CA}=\left(\frac{k}{k+1}-\frac{m}{m+1}\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{l}{l+1}-\frac{m}{m+1}\right)\overrightarrow{BC}$. Ако је $T\equiv T_1$, из линеарне независности вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ следи $\frac{k}{k+1}-\frac{m}{m+1}=\frac{l}{l+1}-\frac{m}{m+1}=0$, односно $k=l=m$. Обрнуто, ако је $k=l=m$, следи $\overrightarrow{TT_1}=\overrightarrow{0}$ тј. $T\equiv T_1$.

6. Означимо са $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{BC}$ и $\vec{d}=\overrightarrow{AD}$. Тада је $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{c}$, $\overrightarrow{DC}=-\vec{d}+\vec{a}+\vec{c}$, $\overrightarrow{AX}=\frac{1}{2}\vec{a}$ и $\overrightarrow{AY}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})$. Из услова задатка имамо да је $\overrightarrow{AP}=p\cdot\overrightarrow{AC}=p\cdot(\vec{a}+\vec{c})$, за $p>1$. За тачку N која припада страници AD важи $\overrightarrow{AN}=n\cdot\overrightarrow{AD}=n\cdot\vec{d}$ (где је $0<n<1$) и слично $\overrightarrow{BM}=m\cdot\overrightarrow{BC}=m\cdot\vec{c}$ (где је $0<m<1$), одакле добијамо $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+m\cdot\vec{c}$. Да би тачке N, Y и P биле колинеарне мора да важи $\varphi\cdot\overrightarrow{AN}+(1-\varphi)\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AY}$, одакле налазимо $\varphi=\dfrac{2p-1}{2p}$ и $n=\dfrac{p}{2p-1}$. Слично је $\theta\cdot\overrightarrow{AX}+(1-\theta)\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}$, одакле налазимо $\theta=\dfrac{2p-2}{2p-1}$ и $m=\dfrac{p}{2p-1}$. Како је $AB\parallel DC$ и $m=n$ из Талесове теореме добијамо и да је $AB\parallel NM\parallel DC$.



7. Претпоставимо да четвороугао $ABCD$ задовољава тражене услове и да је $AC = 2BD$. Тада је $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = AC \cdot BD \cos 45^\circ = BD^2 \cdot \sqrt{2}$. Међутим, ова једнакост је немогућа, јер су

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= (x_c - x_a, y_c - y_a) \cdot (x_d - x_b, y_d - y_b) \\ &= (x_c - x_a)(x_d - x_b) + (y_c - y_a)(y_d - y_b)\end{aligned}$$

и $BD^2 = (x_d - x_b)^2 + (y_d - y_b)^2$ цели бројеви, $BD^2 \neq 0$, па би добили да је $\sqrt{2}$ рационалан број.

Порекло задатака

1. Општинско 2004-5, I разред, А категорија, 2. задатак.

2. Прво интерно у МГ 2003-4, I разред, 4. задатак.

3. Прво интерно у МГ 2004-5, I разред, 2. задатак.

4. Градско 2004-5, I разред, Б категорија, 1. задатак.

5. Републичко 2002-3, I разред, А категорија, 5. задатак.

6. Републичко 2003-4, I разред, А категорија, 1. задатак.

7. Градско 2002-3, III разред, А категорија, 1. задатак.